Dr. M. Bier (bier@is.mpg.de)
M.Sc. H. Bartsch

Physik der Flüssigkeiten II **SoSe 2018**

12. Übungsblatt (`http://www.is.mpg.de/dietrich/lehre/PdF`) **19. Juni 2018**

27. *Orientierungsverteilungsfunktionen von Flüssigkristallen*

Betrachten Sie einen Flüssigkristall in $d = 3$ Raumdimensionen.

Entscheiden Sie für die folgenden Funktionen $f(\mathbf{r}, \omega)$, ob sie mögliche Orientierungsverteilungsfunktionen des Flüssigkristalls sind (vgl. Gl. (10.2.3)). Falls ja, bestimmen Sie die Richtung des Direktors $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ und den skalaren Ordnungsparameter $S(\mathbf{r})$, und charakterisieren Sie die Mesophase:

(a) $f(\mathbf{r}, \omega) = \dfrac{1}{4\pi}\big(1 + (\omega \cdot \mathbf{e}_x)^3\big)$,

(b) $f(\mathbf{r}, \omega) = \dfrac{3}{4\pi}\big(1 - 2(\omega \cdot \mathbf{e}_z)^2\big)$,

(c) $f(\mathbf{r}, \omega) = \dfrac{1}{4\pi}\left(1 + \cos(\omega \cdot \mathbf{e}_y)\right)$,

(d) $f(\mathbf{r}, \omega) = \dfrac{1}{8\pi}\big(1 + 3(\omega \cdot \mathbf{e}_z)^2\big)$,

(e) $f(\mathbf{r}, \omega) = \dfrac{5}{4\pi}\left(\omega \cdot \mathbf{e}_x\right)^4$,

(f) $f(\mathbf{r}, \omega) = \dfrac{1}{4\pi}\left(1 + \dfrac{1}{20}\big(3(\omega \cdot \mathbf{e}_y)^2 - 1\big)\cos\left(\dfrac{y}{\ell}\right)\right)$,

(g) $f(\mathbf{r}, \omega) = \dfrac{1}{4\pi}$,

(h) $f(\mathbf{r}, \omega) = \dfrac{3}{16\pi}\big(1 + (\omega \cdot \mathbf{e}_x)^2\big)$,

(i) $f(\mathbf{r}, \omega) = \dfrac{1}{4\pi}\left(1 + \dfrac{1}{60}\big((\omega \cdot \mathbf{e}_y + 3\omega \cdot \mathbf{e}_z)^4 - 6(\omega \cdot \mathbf{e}_y + 3\omega \cdot \mathbf{e}_z)^2\big)\sin\left(\dfrac{z}{\ell}\right)\right)$,

(j) $f(\mathbf{r}, \omega) = \dfrac{3}{20\pi}\left(\omega \cdot \mathbf{e}_x - 2\omega \cdot \mathbf{e}_z\right)^2$.

(k) $f(\mathbf{r}, \omega) = \dfrac{1}{4\pi}\left(1 + \dfrac{1}{8410}\big(5(2\omega \cdot \mathbf{e}_x + 5\omega \cdot \mathbf{e}_y)^4 - 87(2\omega \cdot \mathbf{e}_x + 5\omega \cdot \mathbf{e}_y)^2\big)\cos\left(\dfrac{2x + 5y}{\ell}\right)\right)$.

Fortsetzung auf Seite 2

28. *Ordnungsparametertensor*

Für einen Flüssigkristall mit bekannter Einteilchendichte $\varrho(\mathbf{r})$ und den bekannten Magnetisierbarkeiten $\xi_\parallel, \xi_\perp$ der Mesogene, werde im Folgenden der experimentell bestimmte Magnetisierbarkeitstensor $\chi_{ij}(\mathbf{r})$ in der skalierten Form

$$\chi^*_{ij}(\mathbf{r}) := \frac{\chi_{ij}(\mathbf{r})}{\mu_0 \varrho(\mathbf{r}) \xi_\perp} \tag{1}$$

ausgedrückt und das Verhältnis $\xi := \xi_\parallel / \xi_\perp$ der longitudinalen zur transversalen Magnetisierbarkeit definiert. Gemäß Gl. (10.3.29) führt man in $d = 3$ Raumdimensionen den Ordnungsparametertensor

$$Q^*_{ij}(\mathbf{r}) := \chi^*_{ij}(\mathbf{r}) - \frac{\mathrm{Tr}\,(\chi^*)}{3}\delta_{ij} \tag{2}$$

als den deviatorischen Anteil von $\chi^*_{ij}(\mathbf{r})$ ein.

(a) Drücken Sie den einfachen Eigenwert $\lambda_1(\mathbf{r})$ von $Q^*(\mathbf{r})$ durch ξ und den skalaren Ordnungsparameter $S(\mathbf{r})$ aus.

(b) Betrachten Sie die folgenden drei verschiedene Flüssigkristalle mit $\xi = 10$ und

i.

$$\chi^*(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

ii.

$$\chi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 + f(\mathbf{r}) & 3f(\mathbf{r}) & 0 \\ 3f(\mathbf{r}) & 8 + f(\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & 0 & 8 - 2f(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

wobei $f(\mathbf{r}) = \cos\left(\frac{x+y}{\ell}\right)^2$ und ℓ eine Länge ist,

iii.

$$\chi^*(\mathbf{r}) = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Bestimmen Sie jeweils den Ordnungsparametertensor $Q^*(\mathbf{r})$, den skalaren Ordnungsparameter $S(\mathbf{r})$, und das Direktorfeld $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, und charakterisieren Sie damit den Flüssigkristall.

Fortsetzung auf Seite 3

29. *Skalare Matrix-Funktionen*

Gegeben sei eine analytische Funktion

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{6}$$

mit $a_n \in \mathbb{R}$ und eine reelle, symmetrische $d \times d$-Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Es soll angenommen werden, dass der Spektralradius von $\underline{\underline{A}}$, d.h. der größte Betrag der Eigenwerte $\lambda_i, i \in \{1, \ldots, d\}$, von $\underline{\underline{A}}$, kleiner ist als der Konvergenzradius von $f(z)$.

In dieser Aufgabe soll für $d = 2$ und $d = 3$ gezeigt werden, dass die matrixwertige Funktion $f(\underline{\underline{A}})$ genau dann ein Skalar ist, d.h.

$$f(\underline{\underline{R}}^\top \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}) = f(\underline{\underline{A}}) \tag{7}$$

für alle reellen orthogonalen Matrizen $\underline{\underline{R}} \in \mathrm{O}(d, \mathbb{R})$, falls gilt

$$f(\underline{\underline{A}}) = F(t_1, \ldots, t_d)\underline{\underline{1}} \tag{8}$$

mit einer geeigneten reellwertigen Funktion $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ der Spuren $t_1 := \mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{A}}\right), \ldots, t_d := \mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{A}}^d\right)$ der ersten d Potenzen von $\underline{\underline{A}}$.

(a) Zeigen Sie zunächst die “Rückrichtung” Gl. (8) $\Rightarrow$ Gl. (7) der Behauptung.

(b) Um die “Vorwärtsrichtung” Gl. (7) $\Rightarrow$ Gl. (8) der Behauptung zu zeigen, wird nun angenommen, dass $f(\underline{\underline{A}})$ ein Skalar ist.

   i. Zeigen Sie mit Hilfe der orthogonalen Matrizen $\underline{\underline{N}}^{(r)} \in \mathrm{O}(d, \mathbb{R})$ aus Aufgabe 11.(b) auf Übungsblatt 4, dass $f(\underline{\underline{A}})$ diagonal ist.

   ii. Zeigen Sie mit Hilfe der orthogonalen Matrizen $\underline{\underline{P}}^{(rs)} \in \mathrm{O}(d, \mathbb{R})$ aus Aufgabe 11.(c) auf Übungsblatt 4, dass $f(\underline{\underline{A}})$ von der Form $c_{\underline{\underline{A}}}\underline{\underline{1}}$ ist mit einer reellen Zahl $c_{\underline{\underline{A}}} \in \mathbb{R}$, die von $\underline{\underline{A}}$ abhängt.

   iii. Zeigen Sie, dass $c_{\underline{\underline{A}}} = \dfrac{\mathrm{Tr}\left(f(\underline{\underline{A}})\right)}{d}$ gilt. Somit bleibt für Gl. (8) noch zu zeigen, dass $c_{\underline{\underline{A}}}$ nicht eine beliebige Funktion der Elemente von $\underline{\underline{A}}$ sein kann, sondern nur von den Spuren $t_1, \ldots, t_d$ der ersten d Potenzen von $\underline{\underline{A}}$ abhängt: $c_{\underline{\underline{A}}} = F(t_1, \ldots, t_d)$.

(c) Von nun an sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass die Matrix $\underline{\underline{A}}$ diagonal ist.

   i. Zeigen Sie für $d = 2$ die Beziehung

$$\underline{\underline{A}}^2 = b_1\underline{\underline{A}} + b_0\underline{\underline{1}} \tag{9}$$

   mit geeignten Koeffizienten $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$. Drücken Sie b_0, b_1 zunächst durch die Eigenwerte λ_1, λ_2 von $\underline{\underline{A}}$ und anschließend durch t_1, t_2 aus.

   ii. Zeigen Sie für $d = 3$ die Beziehung

$$\underline{\underline{A}}^3 = b_2\underline{\underline{A}}^2 + b_1\underline{\underline{A}} + b_0\underline{\underline{1}} \tag{10}$$

   mit geeigneten Koeffizienten $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Drücken Sie b_0, b_1, b_2 zunächst durch die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von $\underline{\underline{A}}$ und anschließend durch t_1, t_2, t_3 aus.

(d) Zeigen Sie Gl. (8) unter Verwendung der Aufgabenteile (b)iii. und (c) für die Fälle $d = 2$ und $d = 3$.